الثانوية التأهيلية: وادي الذهب الأستاذ : رشيد بلمو	درس مبادئ في المنطق – La logique	مستوى الدراسي: الأولى علوم تجريبية عدد الساعات : 08

I. العبارات و العمليات على العبارات:

1.1 العبارات: Les propositions

نشاط1:

1. أنقل الجدول التالي ثم ضع العلامة "x" في الخانة المناسبة .

	صحيح	خاطئ
كل زوجي قابل للقسمة على 4		
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي		
$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$		
اذا كان n^2 عددا فرديا فان n عدد فردي		
المعادلة : $x^2 = -1$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$		
جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة		
114516مضاعف للعدد4		
$\left((-2)^2 = -4\right)$		

2. هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد

تعريف : نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا و إما خاطئا نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز p أو q أو r ......

غالبا ما نعبر عن حقيقة عبارة بجدول يسمى جدول حقيقة عبارة :

الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة

و الرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة

جدول حقيقة عبارة

p
1
0

1.2 العمليات على العبارات: Les opérations sur les propositions

1.2.1. نفي عبارة: Négation d'une proposition

نشاط1: نعتبر العبارة : $p:$" 3 عدد زوجي "

ما قيمة حقيقة العبارة p حدد نفي العبارة p نرمز لها ب $\overline{p}$.ما قيمة حقيقة العبارة $\overline{p}$

تعريف :

نفي عبارة p هو كل عبارة تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة و تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة نرمز لنفي العبارة p بالرمز $\overline{p}$ أو $\neg p$

جدول حقيقة نفي عبارة

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

أمثلة:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية:

- $p: \quad \left((-2)^2 = 4\right)$
- $q: \quad \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

1.2.2. عطف عبارتين: Conjonction de deux propostions

تعريف : عطف عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p$ و $q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا.

جدول حقيقة العطف المنطقي

p	q	p و q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

أمثلة: حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$p: \quad \left(\sqrt{3} \geq 1\right)$ و $\left((-2)^2 = 4\right)$

$q: \quad \sqrt{2} \in Q$ و $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} > 3\right)$

1.2.3. فصل عبارتين: Disjonction de deux propostions

تعريف :

فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p$ أو $q)$ والتي تكون خاطئة فقط إذا كانت العبارتان p و q خاطئتين معا.

جدول حقيقة الفصل المنطقي

p	q	p أو q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

أمثلة: حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$p: \quad \left(\sqrt{3} \geq 1\right)$ أو $\left((-2)^2 = 4\right)$

$q: \quad \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$ أو $\left(\sqrt{3} + \sqrt{5} \prec 3\right)$

1.2.4. استلزام عبارتين : Implication de deux propositions

> *تعريف :* استلزام عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Rightarrow q)$ والتي تكون خاطئة فقط اذا كانت p صحيحة و q خاطئة

ملاحظات

- ❖ العبارة : $(p \Rightarrow q)$ تقرأ : " p تستلزم q " أو " اذا كانت p فان q "
- ❖ العبارة : $(q \Rightarrow p)$ تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $(p \Rightarrow q)$
- ❖ للبرهان أن العبارة : $(p \Rightarrow q)$ صحيحة , نفترض أن العبارة p صحيحة و نبين أن العبارة q صحيحة

جدول حقيقة الاستلزام المنطقي

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

مثال1: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$$\left(\sqrt{3} \geq 1\right) \Rightarrow \left((-2)^2 = -4\right)$$

$$-1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\sqrt{5} \prec 3\right)$$

مثال2: حدد نفي العبارة الآتية :

n عدد فردي $\Rightarrow$ n عدد أولي

1.2.5. تكافؤ عبارتين : Equivalence de deux propositions

> *تعريف :* تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز : $(p \Leftrightarrow q)$ والتي تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا أو خاطئتين معا. العبارة : $(p \Leftrightarrow q)$ تقرأ : " p تكافئ q " أو " p إذا وفقط إذا كان q "

جدول حقيقة التكافؤ المنطقي

p	q	$q \Leftrightarrow p$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

أمثلة: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$$\left(\sqrt{3} \geq 1\right) \Leftrightarrow \left((-2)^2 = 4\right) \qquad -1 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5} \geq 3\right)$$

> **خاصية :** العبارتان $(p \Leftrightarrow q)$ و $\left[(p \Rightarrow q) \text{ و } (q \Rightarrow p)\right]$ متكافئتان

1.3. الدالة العبارية : Fonction propositionnelle

نشاط1: نعتبر التعبير التالي : $(x \in \mathbb{R}); x^2 - x \geq 0$

- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x = 2$
- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x = \frac{1}{2}$
- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x = -1$

إذن التعبير : $(x \in R); x^2 - x \geq 0$ يصبح صحيحا من أجل بعض قيم x من $\mathbb{R}$ خاطئا من أجل بعض قيم x

نشاط2: نعتبر التعبير التالي : $(n \in \mathbb{N}); n^2 \geq 0$

- حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $n = 2$
- هل توجد قيم ل : n لا تحقق التعبير السابق؟

> *تعريف :* نسمي دالة عبارية كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو عدة متغيرات) ينتمي إلى مجموعة معلومة E حيث تصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E ونرمز عادة لدالة عبارية بالرمز أو $B(x)$ أو $A(x;y)$ ....

1.4. المكممات: Les Quantificateurs:

1.4.1. المكمم الوجودي : Le Quantificateur Existentiel

> *تعريف :* انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\exists x \in E, A(x)$ " ونقرأ : " يوجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$ " وتكون العبارة " $\exists x \in E, A(x)$ " صحيحة إذا وجد على الأقل x من E يحقق الخاصية $A(x)$

1.4.2. المكمم الكوني : Le Quantificateur Universel

> *تعريف :* انطلاقا من الدالة العبارية $A(x)$ نكون العبارة " $\forall x \in E, A(x)$ " ونقرأ : " مهما يكن x من E لدينا $A(x)$ " وتكون العبارة " $\forall x \in E, A(x)$ " صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق الخاصية $A(x)$.

1.4.3. عبارة تحتوي على عدة مكممات :

خاصية :
- إذا كانت المكممات من طبيعة مختلفة ؛ فإن ترتيبها يكون ذو أهمية .
- إذا كانت المكممات من نفس الطبيعة ؛ فإن ترتيبها ليس له أي أهمية .

مثال : العبارة : $\forall n \in IN, \ \exists m \in IN; \ n < m$ هي عبارة صحيحة .
العبارة : $\exists m \in IN, \ \forall n \in IN; \ n < m$ هي عبارة خاطئة .

أمثلة: حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. 5 عدد زوجي $\Leftrightarrow$ " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+1=0$ "
2. $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0 \Rightarrow (2 < \sqrt{3})$
3. 3 عدد أولي و " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2-2=0$ "
4. $(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 > 0$
5. $(\forall x \in \mathbb{R}); -1 \leq \cos x \leq 1$
6. $(\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}): n < m$
7. $(\forall n \in \mathbb{N})$ $2n+1$ عدد فردي
8. $(\forall n \in \mathbb{N}); \sqrt{n} \in \mathbb{N}$
9. $(\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}): y - x > 0$
10. $(\exists! x \in \mathbb{R}); 2x+4=0$
11. $(\exists! x \in \mathbb{R}); x^2=2$

خاصية : نفي العبارة " $\forall x \in E, A(x)$ " هو العبارة " $\exists x \in E, \overline{A(x)}$ "
نفي العبارة " $\exists x \in E, A(x)$ " هو العبارة " $\forall x \in E, \overline{A(x)}$ "

أمثلة: حدد العبارة النافية للعبارات الآتية :1) $(\forall n \in \mathbb{N}); 2^n \succ 5(n+1)$ 2) $-\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ و $\exists x \in \mathbb{R}, x^2-2=0$

3) $(\forall n \in \mathbb{N}); (\exists m \in \mathbb{N}): n < m$ 4) $-\frac{3}{2} < 1$ أو n عدد فردي , $\exists n \in \mathbb{N}$ 5) كل مثلث قائم الزاوية له زاوية حادة 6) $(\exists x \in \mathbb{R}); -1 \leq x < 1$

1.5.القوانين المنطقية : Les lois logiques

تعريف : القوانين المنطقية هي عبارات مكونة من عدة عبارات A و B و C ... مرتبطة فيما بينها بالروابط المنطقية : ¬ ؛ و ؛ أو ؛ $\Rightarrow$ ؛ $\Leftrightarrow$ وتكون **صحيحة** مهما كانت قيمة حقيقة العبارات A و B و C.

مثال : قانونا مورغان: Lois de Morgan

نفي العبارة $(P$ أو $Q)$ هي العبارة $(\neg P$ و $\neg Q)$.
نفي العبارة $(P$ و $Q)$ هي العبارة $(\neg P$ أو $\neg Q)$.

أي : $\boxed{\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)}$; $\boxed{\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)}$

ملاحظة : إذا كان لعبارتين P و Q نفس المعنى (نفس جدول الحقيقة) فإن : $P \Leftrightarrow Q$ **قانون منطقي** .

II. الاستدلالات الرياضية : Raisonnements mathématiques

1. الاستدلال الاستنتاجي : Raisonnement par la conclusion

مثال : ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن : $2 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$ **تمرين:** ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن : $-2 \prec x \prec \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{12}{3} \prec \frac{-3x+5}{x+4} \prec \frac{11}{2}$

2. الاستدلال بالمثال المضاد : Raisonnement par le contre exemple

مثال : هل العبارة التالية صحيحة ام خاطئة مع تعليل الجواب: " $\forall x \in \mathbb{R}^*, x + \frac{1}{x} \geq 2$ " $p:$

تمرين: أدرس قيمة حقيقة العبارات التالية : " $0 < \frac{x+y}{xy(1-xy)} < 1$, $\forall y \in]0;1[$ و $\forall x \in]0;1[$ " $p:$

3. الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس : Raisonnement par l'mplication contraposée:

تعريف : نعتبر الإستلزام $P \Rightarrow Q$. الإستلزام $\neg Q \Rightarrow \neg P$ يسمى **الإستلزام المضاد للعكس** للإستلزام $P \Rightarrow Q$

خاصية : الإستلزام $P \Rightarrow Q$ والإستلزام المضاد للعكس $\neg Q \Rightarrow \neg P$ لهما نفس قيمة الحقيقة (نفس المعنى)

ملاحظة : لكي نبرهن أن الاستلزام $(p \Rightarrow q)$ صحيح يكفي أن نبرهن أن الاستلزام المضاد للعكس $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ صحيح **(قانون منطقي)**

مثال1: ليكن $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$ بين أن: $x + y \succ 1 \Rightarrow \left(x \succ \frac{1}{2}\right.$ أو $\left. y \succ \frac{1}{2}\right)$

مثال2:بين باستعمال الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس أنه : اذا كان : $x \in]1;+\infty[$ و $y \in]1;+\infty[$

$(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 2x \neq y^2 - 2y)$

تمرين: $x \in]1;+\infty[$ و $y \in]2;+\infty[$ بين أن: $(x \neq y) \Rightarrow (x^2 - 3x \neq y^2 - 3y)$

4. الاستدلال بالتكافؤ: Raisonnement par l'équivalence

يعتمد الاستدلال بالتكافؤ على القانون المنطقي التالي : إذا كان : $(p \Leftrightarrow q)$ و $(q \Leftrightarrow r)$ فان : $(p \Leftrightarrow r)$

مثال: بين أن : $\forall (a;b) \in (\mathbb{R}^{*+})^2 \quad a + b \geq 2\sqrt{ab}$ **تمرين:** بين أن : $\forall x > 0 , x + \frac{1}{x} \geq 2$

5. الاستدلال بفصل الحالات : Raisonnement par disjonction des cas

يعتمد الاستدلال بفصل الحالات على القانون المنطقي التالي : $[(p \text{ أو } r) \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \text{ و } (r \Rightarrow q)]$

مثال: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E): |3x - 6| = 1$

تمرين 1: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E): x^2 - |x+1| + 1 = 0$

تمرين 2: باستعمال الاستدلال بفصل الحالات. بين أن : $n^2 + n$ عدد زوجي $\forall n \in \mathbb{N}$

6. الاستدلال بالخلف : Raisonnement par l'absurde

يعتمد الاستدلال بالخلف على القانون المنطقي التالي : $[(\bar{p} \Rightarrow q) \text{ و } \bar{q}] \Rightarrow p$

ملاحظة : لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

مثال1: $n \in \mathbb{N}$ بين أنه اذا كان n^2 عدد زوجي فان : n عدد زوجي

تمرين1: بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \neq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

تمرين2:لتكن f دالة تزايدية قطعا على مجال I , و a و b عنصرين من I بحيث: $f(a) = b$ و $f(b) = a$

بين أن : $a = b$ (يمكنك استعمال الاستدلال بالخلف)

7. الاستدلال بالترجع: Raisonnement par la récurrence

خاصية : لتكن $p(n)$ عبارة مرتبطة فقط بعدد صحيح طبيعي n

إذا كانت :

- $p(n)$ عبارة صحيحة من أجل عدد صحيح طبيعي معلوم n_0
- العبارة $(p(n) \Rightarrow p(n+1))$ صحيحة من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n \geq n_0$

فان : $p(n)$ عبارة صحيحة لكل n من $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq n_0$

ملاحظة : لكي نبرهن أن العبارة $p(n)$ صحيحة $\forall n \in \mathbb{N}$

نمر بثلاث مراحل :

- نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$
- نفترض أن العبارة صحيحة بالنسبة ل n
- نبين أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n+1$

مثال1: $a \in \mathbb{R}^+$ بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1 + na$

مثال2: بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq 1 + n$

مثال3:بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$

مثال4: بين $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي n